

Zeit-Uhr H51 / H13

Mathematisches Modell

Erkenntnisse der Wahrnehmungspsychologie zeigen die von uns Menschen angeborene Fähigkeit, Zahlen und Raum mental durch eine bildliche Zahlenlinie zu verknüpfen, welche einer logarithmisch komprimierten Skala folgt. Erst durch die mathematische Ausbildung erwerben wir das lineare Zahlenverständnis.

Zudem lehrt uns die Psychologie, dass die Imagination von Zeitdauern ebenfalls entlang einer bildlichen Linie, der sogenannten «Zeitlinie», mental abgebildet wird. Diese sei mit der mentalen Zahlenlinie vergleichbar und damit insbesondere auch logarithmisch komprimiert.

Im Rahmen der Zeit-Uhr wird die mentale Zeitlinie als imaginäre Zeitperspektive bezeichnet. Sie beschreibt damit die mentale bildliche Vorstellung von vergangenen und zukünftigen Zeitdauern und wird durch die Bogenlängen einer logarithmischen Spirale mit negativem Steigungsparameter modelliert.

Obwohl das mathematische Modell seinen eigenen Ansatz verfolgt, kann eine formal stringente Brücke zu dem «Weber-Fechner-Gesetz» gezeigt werden. Dabei werden die imaginären Zeitpunkte als objektive Reizintensitäten und die entsprechenden imaginären Zeitdauern als subjektive Empfindungen interpretiert.

Das Zeit-Zeit-Modell

Es sei der Radius einer normierten logarithmischen Spirale in Polarkoordinaten

$$r(2\pi t) = \frac{e^{a2\pi|t|}}{2\pi}$$

t $t \in (-\infty, \infty)$, imaginärer Zeitpunkt in der Vergangenheit ($t < 0$) oder in der Zukunft ($t > 0$), gemessen in Anzahl Halbtagen (Zeiteinheit 12 Stunden) vom «Jetzt» ($t=0$) entfernt

$2\pi t$ Polarwinkel für den Zeitpunkt t

a Steigungsparameter $a < 0$

$a = 0$ Spezialfall: Kreis

Anmerkung:

Die Variable t des Modells (Anzahl Halbtage) ist spezifisch für die Zeit-Uhr gewählt. Der Modellansatz an sich ist unabhängig von der gewählten Dimension von t .

Damit sei die **Zeit-Zeit-Intensität** $z(t)$ eines imaginären Zeitpunktes t definiert durch die Ableitung der Stammfunktion $Z(t)$ zur Berechnung von Bogenlängen von logarithmischen Spiralen.

$$Z(t) = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a2\pi} e^{a2\pi|t|}$$

$$\frac{d}{dt} Z(t) := z(t) = \sqrt{1+a^2} e^{a2\pi|t|}$$

insbesondere

$$t = 0 \text{ und } a < 0 \rightarrow z(t) = \sqrt{1 + a^2} > 1 (!)$$

$$a = 0 \rightarrow z(t) = 1 \text{ für alle } t \text{ (lineare Zeit-Zeit-Intensität = Uhr-Zeit-Intensität)}$$

und mithin die **Zeit-Zeit-Dauer** $Z(t_1, t_2)$ der imaginären Zeitspanne vom Zeitpunkt t_1 bis zum Zeitpunkt t_2 , definiert als bestimmtes Integral über die Zeit-Zeit-Intensität $z(t)$, dargestellt als Spiralbogenlänge zwischen den Polarwinkeln $2\pi|t_1|$ und $2\pi|t_2|$:

$$Z(t_1, t_2) = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a2\pi} (e^{a2\pi|t_2|} - e^{a2\pi|t_1|})$$

$0 \leq |t_1| \leq |t_2|$ t_1, t_2 zwei imaginäre Zeitpunkte, beide in der Vergangenheit oder beide in der Zukunft

insbesondere für

$$a \rightarrow 0 \quad \lim_{a \rightarrow 0} Z(t_1, t_2) \rightarrow |t_2| - |t_1|$$

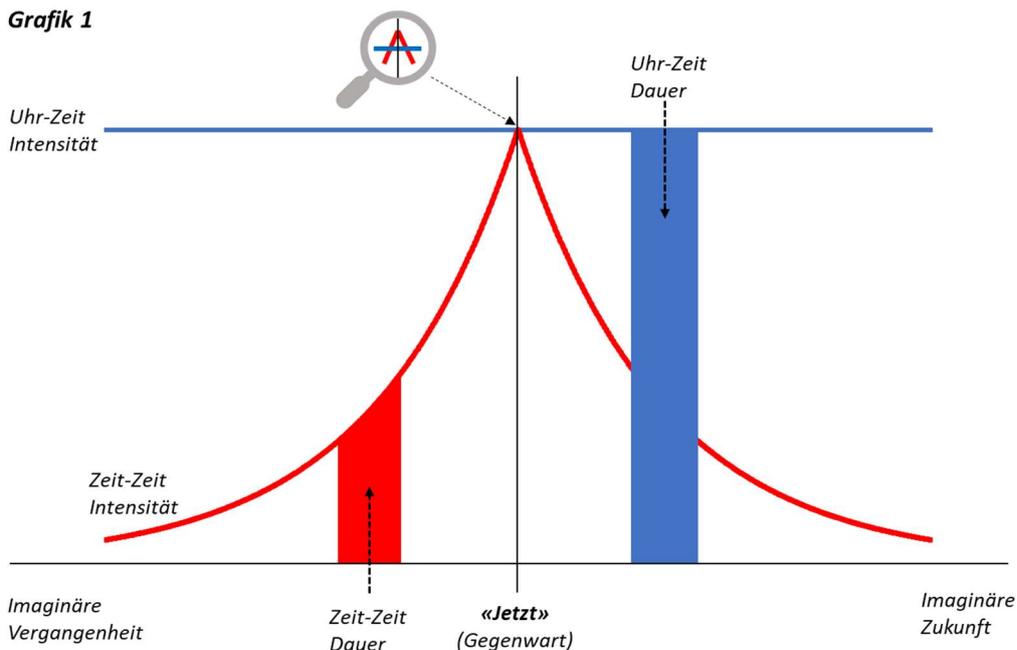
Grenzwert der Zeit-Zeit-Dauer ist die herkömmliche Uhr-Zeit-Dauer (!)

$$|t| \rightarrow \infty \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} Z(0, |t|) = - \frac{\sqrt{1+a^2}}{a2\pi}$$

Endliche Bogenlänge bei unendlicher Zeit (!)

Der zur Kalibrierung der Zeit-Uhr in der Tat numerisch verwendete Steigungsparameter a , wird als «Bürgi-Parameter»* a_B bezeichnet.

Grafik 1



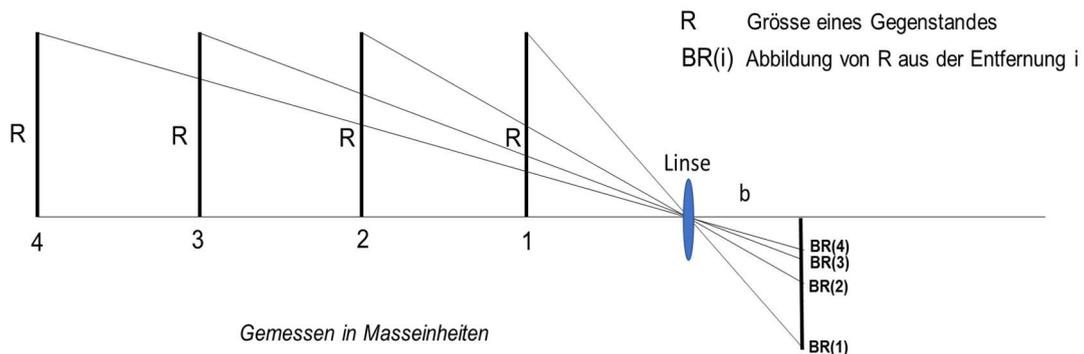
*Gewidmet Jost Bürgi (1552-1632), Schweizer Uhrmacher, Erfinder von astronomischen Instrumenten und Mathematiker

Zur Quantifizierung des «Bürgi-Parameters»

Vorbemerkung:

Die Quantifizierung des Steigungsparameters der logarithmischen Spiralen für die Konstruktion der Zeit-Uhr ist im Sinne eines philosophischen Gedankenganges, gestützt auf mathematische Zusammenhänge zu verstehen.

Unsere perspektivische Wahrnehmung des Raumes basiert physikalisch im Wesentlichen auf den Regeln des «Strahlensatzes» in der Mathematik.



Also $\frac{R}{n} = \frac{BR(n)}{b}$ und damit $BR(n) = \frac{1}{n}BR(1)$

Das Auge sieht jedoch nicht eindimensional, sondern Flächen innerhalb des Gesichtsfeldes.

Anmerkung:

Die räumliche Wahrnehmung der Umwelt entsteht erst über das stereoskopische Sehen unserer beidäugigen Betrachtung von Objekten, zusammen mit der Modellierung der Bilder durch das Sehzentrum des Gehirns. Für die Quantifizierung des «Bürgi-Parameters» ist dies nicht relevant.

Das von unserem Auge durch die Raum-Perspektive imaginär wahrgenommene Bild einer Kreisfläche $BK(1)$ mit Radius $R = BR(1)$ schrumpft damit mit zunehmendem Abstand, $n \geq 1$ Masseinheiten vom Auge entfernt, auf

$$BK(n) = BR(1)^2 \frac{\pi}{n^2} ; \text{ gemessen in } BR(1)^2 \text{ auf } \frac{\pi}{n^2}$$

Andererseits schrumpft nach dem Formalismus der Zeit-Perspektive die imaginäre Zeit-Zeit-Dauer mit zunehmendem Abstand, $n \geq 1$ Masseinheiten vom «Jetzt» entfernt, auf

$$Z(n-1, n) = T(a)e^{a2\pi} ; \text{ gemessen in } T(a) \text{ auf } e^{a2\pi n}$$

mit

$$T(a) = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a2\pi} (1 - e^{-a2\pi})$$

Beide Abbildungen beschreiben mit $n \rightarrow \infty$ eine Formalisierung von Unendlichkeit.

Ausgehend davon, dass sowohl die formalisierte physikalische Raum-Perspektive als auch die postulierte bildlich mentale Zeit-Perspektive etwas vom Wesen unserer kognitiven Verarbeitung von Unendlichkeit spiegeln, sei der Ansatz

$$\frac{\pi}{n^2} \sim e^{a2\pi n} \quad \sim \text{es besteht heuristisch eine Affinität}$$

und darauf basierend die funktionale Beziehung

$$a(x) := \frac{\ln\left(\frac{\pi}{x^2}\right)}{2\pi x} \quad x \in \mathbb{R}, x \geq \sqrt{\pi} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a(x) = 0$$

Für den Steigungsparameter a einer logarithmischen Spirale gilt allgemein: Je grösser $|a|$, desto trennschärfer sind die Spiralbogen, das heisst, desto grösser sind die Abstände zwischen ihnen.

Durch

$$\frac{d}{dx} a(x) := 0$$

zeigt sich, dass $a(x)$ ein eindeutiges Minimum aufweist und damit eine Spirale mit maximalen Bogenabständen generiert.

$$\min a(x) = a(e\sqrt{\pi}) = -\frac{1}{e\pi^{1.5}} = -0.066066 := \mathbf{a_B}$$

Für $x = e\sqrt{\pi} = 4.818$ Mass-, beziehungsweise Zeiteinheiten vom «Hier» und «Jetzt» entfernt, weisen damit die Raum-Perspektive und die Zeit-Perspektive unter den obigen Annahmen eine formal eindeutige, identische Schrumpfung der modellierten Wahrnehmung des Raumes und der Zeit auf.

Anmerkung:

So wie das Zeit-Zeit-Modell an sich unabhängig von der Dimension der gewählten Zeiteinheiten ist, sind die von uns Menschen wahrgenommenen zentralperspektivischen Grössen/Abstand-Verhältnisse unabhängig vom Fokus auf einzelne Objekte, seien sie nah oder fern.

Unser Auge kann nicht «zoomen», also Objekte beim Sehen näher heranholen oder weiter wegrücken. Es ist nur in der Lage, mit seinem perspektivischen Blick, sich auf nahe und ferne Objekte zu fokussieren und diese scharf zu sehen. Das geschieht durch die sogenannte Akkommodation, die muskulär erzeugte Veränderung der Linsenkrümmung.

Vergleich des Zeit-Zeit-Modells mit dem Weber-Fechner-Gesetz der Psychophysik

Viele wissenschaftliche Arbeiten der Wahrnehmungspsychologie über logarithmische Zusammenhänge von objektiven Reizintensitäten und subjektiv empfundenen Intensitäten von Sinneseindrücken wurzeln im «Weber-Fechner-Gesetz».
(Gustav Theodor Fechner; 1801 – 1887)

Das mathematische Modell der Zeit-Uhr basiert auf der logarithmischen Spirale. Die Frage stellt sich, ob und gegebenenfalls wie das Zeit-Zeit-Modell und das Weber-Fechner-Gesetz zusammenhängen.

Das Weber-Fechner-Gesetz

Mit den spezifischen Bezeichnungen der Psychophysik in der Fachliteratur

R *Physikalisch messbarer Reiz*
 E *Empfindungsstärke des Reizes*
 c_1 *Konstante*

ist das Fechnersche Gesetz definiert durch

$$\Delta E := c_1 \frac{\Delta R}{R}$$

und daraus durch Integration abgeleitet das Weber-Fechner-Gesetz, hier differenziert durch zwei Konstanten und einen Schwellenreiz,

$$E(R) = c_2 + c_1 \ln\left(\frac{R}{R_0}\right)$$

mit

R_0 *Schwellenreiz (kleinster Reiz, welcher noch eine Empfindung auslöst)*
 c_1, c_2 *Konstanten*
 $\ln(\cdot)$ *Natürlicher Logarithmus*

Insbesondere gilt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} E(R) = \infty$$

Die Empfindungsstärke wächst formal unbegrenzt bei unbegrenzt wachsendem Reiz. Selbstredend sind Reiz und Empfindungsstärke in der Praxis immer begrenzt, was beschränkte Anwendungsmöglichkeiten für das Weber-Fechner-Gesetzes bedeutet.

Das Zeit-Zeit-Modell der Zeit-Uhr

Der Modell-Ansatz für die Zeit-Zeit führt über die imaginären sogenannten Zeit-Zeit-Intensitäten und deren bestimmten Integrale zu imaginären Zeit-Zeit-Dauern, mathematisch modelliert durch die Spiralbogenlängen der logarithmischen Spirale (vgl. oben).

Die Spiralbogenlänge der Zeitspanne $(0,|t|)$ ist bestimmt durch

$$Z(0, t) = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a2\pi} (e^{a2\pi|t|} - e^{a2\pi|0|})$$

sowie deren Normierung mit $Z(0,1)$ durch

$$\mathbf{B}(0, t) := \frac{Z(0,t)}{Z(0,1)} = \frac{1-e^{a2\pi|t|}}{1-e^{a2\pi}} \quad (\text{Partialsumme einer geometrischen Folge})$$

$B(0,t)$ beschreibt das dimensionslose Verhältnis der mentalen bildlichen Dauer $Z(0,t)$ zu $Z(0,1)$. Sinngemäß ist dies zu vergleichen mit $E(R)/E(R_0)$ des Weber-Fechner Ansatzes. Eine objektive Dauer einer imaginären Zeitspanne ist selbstredend nicht messbar.

Insbesondere gilt

$$B(0, \infty) = \frac{1}{1-e^{a2\pi}} \quad (\text{Gesamtbogenlänge der logarithmischen Spirale})$$

Im Gegensatz zum Weber-Fechner-Gesetz wird damit im Zeit-Zeit-Modell die Empfindungsstärke bei unbegrenzt wachsendem Reiz als begrenzt modelliert.

Direkter Vergleich des Weber-Fechner-Gesetzes mit dem Zeit-Zeit-Modell

Formal:

$$\text{Weber-Fechner-Gesetz: } E(R) = c_2 + c_1 \ln\left(\frac{R}{R_0}\right)$$

$$E(e^{R+d}) = c_2 + c_1 \ln\left(\frac{e^{R+d}}{R_0}\right)$$

$$E(e^{R+d}) - E(e^R) = \mathbf{c_1 d}$$

$d \geq 0$ Konstante

$$\text{Zeit-Zeit-Modell: } B(0, t) = \frac{1-e^{a2\pi|t|}}{1-e^{a2\pi}}$$

$$B(0, t+d) - B(0, t) = \frac{1}{1-e^{a2\pi}} (e^{a2\pi|t|} - e^{a2\pi(|t|+d)}) = \mathbf{D e^{a2\pi|t|}}$$

$$D = \frac{1-e^{a2\pi d}}{1-e^{a2\pi}} ; d \geq 0 ; a < 0 \quad \text{Konstanten}$$

Verbal:

Weber-Fechner:

«Exponentiell wachsender Reiz bewirkt linearen Zuwachs der Empfindung.»

Zeit-Zeit-Modell:

«Linear wachsender Reiz bewirkt exponentiell schrumpfenden Zuwachs der Empfindung.»

Approximation des Zeit-Zeit-Modells durch den Weber-Fechner-Ansatz

Um den formalen Vergleich dieser zwei Modelle zu veranschaulichen, sei das Zeit-Zeit-Modell unter einschränkenden Nebenbedingungen durch das Weber-Fechner-Gesetz zu approximieren.

Seien im Sinne des Weber-Fechner-Gesetzes die imaginären numerischen Zeitpunkte t des Zeit-Zeit-Modells interpretiert als objektive Reizintensitäten und die imaginären relativen Zeitdauern $B(0,t)$ als subjektive Empfindungen der Zeitdauern von t Zeiteinheiten.

Weiter sei t_0 betrachtet als Schwellenreiz, sinngemäss vergleichbar mit R_0 von Weber-Fechner.

Im Zeit-Zeit-Modell ist $|t_0| := 1$ und damit

$$B(0,t_0) = B(0,1) = 1$$

sowie aus

$$B(0,t_1) := 2 \rightarrow |t_1| = \frac{1}{a2\pi} \ln(2e^{a2\pi} - 1) = 2.74$$

Der Reiz des imaginären Zeitpunktes t_0 löst also 1 Empfindungseinheit aus und der Reiz des imaginären Zeitpunktes t_1 bewirkt 2 Empfindungseinheiten. $|t_1 - t_0| = 1.74$ entspricht sinngemäss einer «JND» (*Just Noticeable Difference*) in der Terminologie der Psychophysik.

Werden damit für die angestrebte Approximation die Weber-Fechner-Konstanten c_1 und c_2 durch das Gleichungssystem

$$B(0,1) = c_2 + c_1 \ln\left(\frac{1}{1}\right) := 1$$

$$B(0,2.74) = c_2 + c_1 \ln\left(\frac{2.74}{1}\right) := 2$$

geschätzt, resultiert

$$c_2 = 1 \text{ und } c_1 = 0.99... \sim 1.0$$

mithin die exemplarische numerische Approximation des Zeit-Zeit-Modells durch das Weber-Fechner-Gesetz

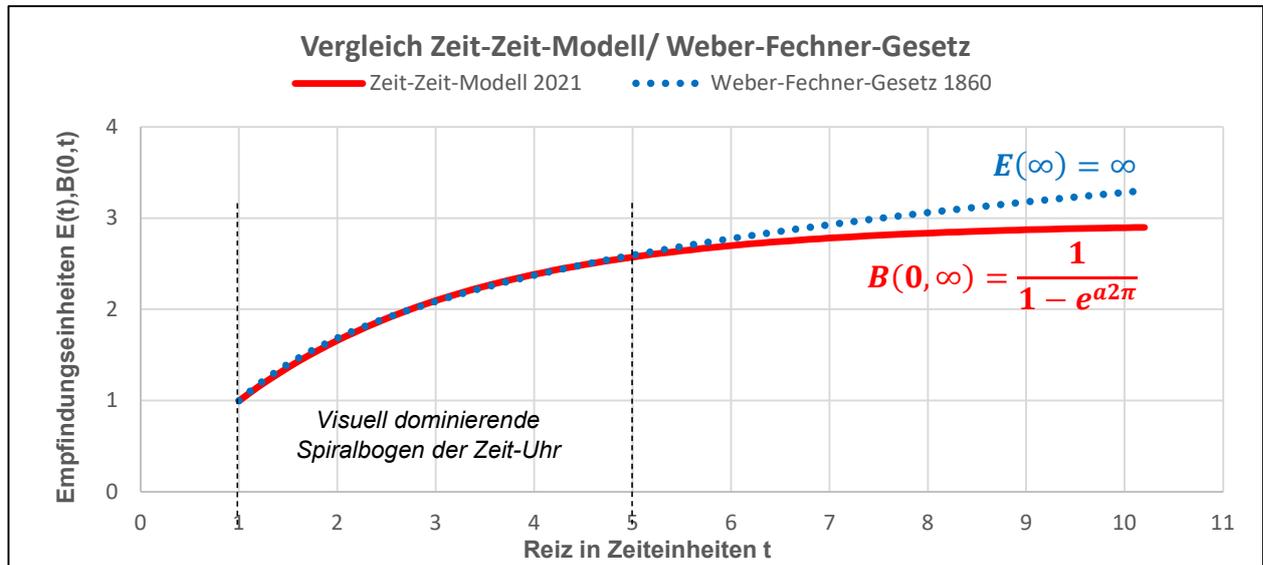
$$\mathbf{B(0,t) \approx 1 + \ln(|t|)}$$

Fazit:

Unter den vorgegebenen Nebenbedingungen und $|t| \leq 5$ liefert das Weber-Fechner-Gesetz eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Zeit-Zeit-Modell. Für $|t| > 5$ divergieren die beiden Modelle zunehmend (vgl. Grafik 2).

Es ist interessant anzufügen, dass gerade diese sehr gut approximierten 5 längsten Spiralbogen den optisch faszinierenden Gesamteindruck der Zeit-Uhr stark prägen.

Grafik 2



Dank

Für die wertvollen Hinweise auf ausgewählte Studien, welche sich auf die logarithmische Wahrnehmung von mentalen bildlichen Zahlenlinien und Zeitlinien beziehen, gilt ein ganz besonderer Dank Prof. Dr. Fred Mast, Head of Cognitive Psychology, Perception and Research Methods, University of Bern, und seinen Mitarbeitern, insbesondere konkret Dr. Matthias Maalouli-Hartmann für folgende Einstiegsanregungen:

<https://www.sciencedaily.com/releases/2008/05/080529141344.htm>

https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1053810009000877?casa_token=62vEk6YtSS-wAAAAA:KemU0B5a4hy2CvN_eD3pEmqUF22iq3cXP-cPi6W_AxS-21-6mDI1LLTp2xmvA-TuS5RvnQFUs8M2T

<https://www.biorxiv.org/content/10.1101/2021.10.25.465750v1.abstract>

1.4.2024 Hans Ammeter

HALDIMANN HOROLOGY • Villa Nussbühl • Riedstrasse 2 • CH-3600 Thun • Switzerland
 info@haldimann.swiss • www.haldimann.swiss • Fon: +41 33 223 30 82 • UID: CHE-108.202.447